

4/5/2017

Isometries

$$(E, \langle, \rangle_E) \xrightarrow{f} (F, \langle, \rangle_F)$$

Για να είναι ισομετρία

→ f γραμμική

$$\rightarrow \| \vec{a} \| = \| f(\vec{a}) \| \quad \forall \vec{a} \in E$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle f(\vec{a}), f(\vec{b}) \rangle$$

$$\underbrace{\angle(\vec{a}, \vec{b})}_{\phi} = \underbrace{\angle(f(\vec{a}), f(\vec{b}))}_{\theta}, \quad \vec{a}, \vec{b} \neq 0$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

$$\cos \phi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\| \vec{a} \| \| \vec{b} \|}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\cos \theta = \frac{\langle f(\vec{a}), f(\vec{b}) \rangle}{\| f(\vec{a}) \| \| f(\vec{b}) \|}$$

Αν δύο διανύσματα είναι κάθετα και οι εικόνες τους είναι κάθετες.

Πρόταση Έστω $f: (E, \langle, \rangle_E) \rightarrow (F, \langle, \rangle_F)$ ισομετρία.
Τότε f 1-1.

Απόδειξη

$$\text{Έστω } \vec{a} \in \text{Ker } f \Rightarrow f(\vec{a}) = \vec{0}$$

$$\| \vec{a} \| = \| f(\vec{a}) \| = \| \vec{0} \| = 0 \Rightarrow \| \vec{a} \| = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \text{Ker } f = \{ \vec{0} \} \Rightarrow f \text{ 1-1}$$

Πρόταση: Έστω $f(E, \langle, \rangle_E) \rightarrow (F, \langle, \rangle_F)$ ισομετρία
και $\dim E = \dim F = n$. Τότε f ισομορφισμός. =n

Απόδειξη

f ισομορφισμός $\Rightarrow f \cdot 1-1 \Rightarrow \text{Ker } f = \{0\}$

$$\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) \Rightarrow \dim \text{Im } f = n$$

$n \qquad 0$

$$\Rightarrow \text{Im } f \subseteq F \Rightarrow \dim F = n.$$

$$\text{Im } f = F \quad (\text{εμ})$$

Πορίσμα

Έστω $f(E, \langle, \rangle_E) \rightarrow (E, \langle, \rangle_E)$ ισομετρία και $\dim E = n$
Τότε f ισομορφισμός.

Πρόταση Έστω $f(E, \langle, \rangle_E) \rightarrow (F, \langle, \rangle_F)$ ισομετρία.

Αν $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο του E .

Τότε $\{f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_m)\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο του F .

$$\bullet \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\} \text{ ορθοκανονικό σύνολο } \stackrel{\text{οοβ.}}{\Leftrightarrow} \langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = \delta_{ij} \\ 1 \leq i, j \leq m.$$

$$\bullet \langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = \delta_{ij} \Leftrightarrow \langle f(\vec{x}_i), f(\vec{x}_j) \rangle = \delta_{ij}$$

Άρα $f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_m)$ ορθοκανονικό σύνολο.

Επίμονο

Έστω $f: (E, <, >_E) \rightarrow (F, <, >_F)$ ισομετρία με $\dim E = n$, $\dim F = m$.

Τότε είναι η εξίσωση $f(x) = 0$ με n και m .

Ανάμνηση

$$\begin{array}{lcl} \dim E & = & \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f \\ \text{" } n & & \text{" } 0 \qquad \qquad \dim \text{Im } f = n \\ & & \text{Im } f \subseteq F \\ & & \boxed{n \leq m} \end{array}$$

Θεώρημα

Έστω $f: (E, <, >_E) \rightarrow (F, <, >_F)$ γραμ. απεικόνιση με $\dim E = \dim F = n$.

Η f είναι ισομετρία αν και μόνο αν ισχύει ότι αν $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ ΟΚΒ του E τότε $\{f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_n)\}$ ΟΚΒ του F .

Απόδειξη

($\Rightarrow$)

f ισομετρία.

$\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ ΟΚΒ του E . $\Rightarrow \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ ορθων. σύνολο.

$\Rightarrow \{f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_n)\}$ ορθων. σύνολο.

$$\lambda_1 f(\vec{x}_1) + \lambda_2 f(\vec{x}_2) + \dots + \lambda_n f(\vec{x}_n) = \vec{0}$$

$$\langle \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \dots + \lambda_i f(\vec{x}_i) + \dots + \lambda_n f(\vec{x}_n), f(\vec{x}_i) \rangle = \langle \vec{0}, f(\vec{x}_i) \rangle$$

$$\lambda_1 \langle f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_i) \rangle + \dots + \lambda_i \langle f(\vec{x}_i), f(\vec{x}_i) \rangle + \dots + \lambda_n \langle f(\vec{x}_n), f(\vec{x}_i) \rangle = 0$$

$$\lambda_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

$f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_n)$ Α.Α. με σε n διάνυσμα $n = \dim F$.

$\Rightarrow f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_n)$ βάση του F .

Απόδειξη: ($\Leftarrow$) Αν $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\}$ ΟΚΒ του E , τότε $\{f(\vec{y}_1), \dots, f(\vec{y}_n)\}$
 Είναι ΟΚΒ του F $\vec{a} \in E : \vec{a} = x_1 \vec{y}_1 + x_2 \vec{y}_2 + \dots + x_n \vec{y}_n$ $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$$f(\vec{a}) = f(x_1 \vec{y}_1 + \dots + x_n \vec{y}_n) \stackrel{f \text{ γραμ.}}{=} x_1 f(\vec{y}_1) + \dots + x_n f(\vec{y}_n)$$

$$f(\vec{a}) = x_1 f(\vec{y}_1) + \dots + x_n f(\vec{y}_n)$$

$$f(\vec{y}_1), \dots, f(\vec{y}_n) \text{ ΟΚΒ}$$

$$\|f(\vec{a})\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Άρα $\|\vec{a}\| = \|f(\vec{a})\| \Rightarrow f$ ισομετρία

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ γραμ.} \\ \text{ΟΚΒ του } E \rightarrow \text{ΟΚΒ του } F \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ ισομετρία}$$

$$f \text{ ισομετρία} \Rightarrow \text{ονομαχνοτε ΟΚΒ του } E \rightarrow \text{ΟΚΒ του } F$$

Κατασκευή ισομερσιών

$$(E, \langle, \rangle_E) \longrightarrow (F, \langle, \rangle_F)$$

$$\dim E = \dim F = n$$

Βρίσκουμε μια τυχαία ΟΚΒ $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\}$ του E πρώτα $\rightarrow$ και μια τυχαία ΟΚΒ του F , έστω των $\vec{\delta}_1, \dots, \vec{\delta}_n$

$$(E, \langle, \rangle_E) \longrightarrow (F, \langle, \rangle_F)$$

$$\dim E = n \leq \dim F = m$$

$\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$ ΟΚΒ του E

$\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2, \dots, \vec{\delta}_n$ οποιαδήποτε ορθοκανονικά βέκτορες του F

Παλ. 5 / Ασκ. 1: $\mathbb{R}^4$, $V = \langle (1, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 2) \rangle$

$$\vec{a}_1 = (1, 1, 0, 0), \vec{a}_2 = (0, -1, 0, 2) \quad \vec{a}_1, \vec{a}_2 \in A.$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2$ βέκτορες του V

Λύση: $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 = (1, 1, 0, 0)$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 = (0, -1, 0, 2) - \frac{\langle (0, -1, 0, 2), (1, 1, 0, 0) \rangle}{\langle (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0) \rangle} \cdot (1, 1, 0, 0)$$

$$= (0, -1, 0, 2) - \frac{-1}{2} (1, 1, 0, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 2\right)$$

$$\vec{\gamma}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$$

$$\vec{\gamma}_2 = \frac{\vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{2}}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{1}{\sqrt{18}}, 0, \frac{4}{\sqrt{18}}\right)$$

(2)

$$OKB \text{ του } V \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{1}{\sqrt{18}}, 0, \frac{4}{\sqrt{18}} \right) \right\}$$

$$\vec{a}_1 = (1, 1, 0, 0), \vec{a}_2 = (0, -1, 0, 2)$$

Συμπληρώστε εκεί που δεν έχω απαντήσει

$$\vec{a}_3 = (0, 0, 1, 0), \vec{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$$

Κάτω Gram-Smith

► Βρείτε μια ισομετρία από τον χώρο $\mathbb{R}^2$ στον V (και ο, δύο με το βάσιμες του αντίστοιχου χώρου)

Λύση: $OKB \text{ του } \mathbb{R}^2 \left\{ \vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1) \right\}$

$$OKB \text{ του } V \left\{ \vec{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \vec{f}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{1}{\sqrt{18}}, 0, \frac{4}{\sqrt{18}} \right) \right\}$$

$$\vec{e}_1 \rightarrow \vec{f}_1$$

$$F(1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right)$$

$$\vec{e}_2 \rightarrow \vec{f}_2$$

$$F(0, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{1}{\sqrt{18}}, 0, \frac{4}{\sqrt{18}} \right)$$

$$F(x, y) = F(x(1, 0) + y(0, 1)) = x F(1, 0) + y F(0, 1) =$$

$$= x \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) + y \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{1}{\sqrt{18}}, 0, \frac{4}{\sqrt{18}} \right) =$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{18}}, \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{18}}, 0, \frac{4y}{\sqrt{18}} \right)$$

Φωλ. 6 / Ασκ. 3: $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathbb{R}_2[x], \langle, \rangle)$ $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Λύση: ΟΚΒ του $\mathbb{R}^3$ $\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$

ΟΚΒ του $\mathbb{R}_2[x]$ $f_1 = 1, f_2 = \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2}\right)$

$f_3 = \sqrt{180} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$
(των e_i αν $\beta \in \mathbb{R}$ $\beta \in$
προς. $\mu \in$ Gram-Smith)

$$f(\vec{e}_1) = 1$$

$$f(\vec{e}_2) = \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$f(\vec{e}_3) = \sqrt{180} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

$$f(a, b, \gamma) = f(a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)) =$$

$$= a f(1, 0, 0) + b f(0, 1, 0) + \gamma f(0, 0, 1) =$$

$$= a \cdot 1 + b \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2}\right) + \gamma \sqrt{180} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) =$$

$$= a - b \frac{\sqrt{12}}{2} + \gamma \frac{\sqrt{180}}{6} + x (b \sqrt{12} - \gamma \sqrt{180}) + x^2 (\gamma \sqrt{180})$$

$$(\mathcal{E}, \langle, \rangle_{\mathcal{E}}) \rightarrow (\mathcal{E}, \langle, \rangle_{\mathcal{E}}) \quad f \text{ isomorphism}$$

$$[f]_{\alpha}^{\alpha}$$

$$[f]_{\gamma}^{\gamma} \quad \gamma \text{ OKB von } \mathcal{E} \quad \gamma = \{\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_n\}$$

$$[f]_{\gamma}^{\gamma} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A$$

$$f(\vec{\gamma}_1) = a_{11}\vec{\gamma}_1 + a_{21}\vec{\gamma}_2 + \dots + a_{n1}\vec{\gamma}_n$$

$$f(\vec{\gamma}_i) = a_{1i}\vec{\gamma}_1 + a_{2i}\vec{\gamma}_2 + \dots + a_{ni}\vec{\gamma}_n$$

$$f(\vec{\gamma}_n) = a_{1n}\vec{\gamma}_1 + \dots + a_{nn}\vec{\gamma}_n$$

$$\gamma \text{ OKB } \Rightarrow \{f(\vec{\gamma}_1), \dots, f(\vec{\gamma}_i), \dots, f(\vec{\gamma}_n)\} \text{ OKB von } \mathcal{E}$$

$$\langle f(\vec{\gamma}_i), f(\vec{\gamma}_j) \rangle = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj}$$

$$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix} \end{pmatrix} = a_{1j}a_{2i} + a_{2j}a_{2i} + \dots + a_{nj}a_{ni}$$

$\begin{matrix} \nearrow i \text{ Zeile} & \nwarrow j \text{ Spalte} \end{matrix}$

$$A^t A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{nj} \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2i} & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{ni} & & & a_{ni} & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = A^t A = I_n \quad A = \begin{pmatrix} f \\ r \\ r \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ 160 \mu \epsilon \pi \rho \acute{\iota} \alpha \varsigma \end{matrix}$$

Ορισμός: Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ λέγεται ορθογώνιος αν $A^t A = I_n$.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ορθογώνιος αν-ν διαφορετικοί
στήλες του είναι κάθετες μεταξύ τους και κάθε μία έχει μήκος
1 όταν $\mathbb{R}^{n \times 1}$ με το εσωτερικό γινόμενο.

A ορθογώνιος $(=)$ A αντιστρέψιμος και $A^{-1} = A^t$

$$A A^{-1} = I_n \Rightarrow A A^t = I_n$$

Οι γραμμές του A έχουν μήκος 1 και το εσωτερικό γινόμενο
δύο διαφορετικών είναι 0.

Φυλ. 6 / Ασκ. 1

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & * & * \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & * & * \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

* = i
για να είναι ορθώνος
για A ορθώνος

Λύση: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$

βρίσκω τον $\mathbb{R}^{4 \times 1}$

Gram-Schmidt

μπορώ να ερμηνεύσω αρχικά τους διανύσματα
και να εφαρμόσω Gram-Schmidt
ή

$$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2ος τρόπος:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & a_1 & a_2 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & b_1 & b_2 \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

$$a_1 \cdot 1/\sqrt{3} + b_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \gamma_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \delta_1 \cdot 0 = 0$$

$$a_1 \cdot 1/\sqrt{14} + b_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + \gamma_1 \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{14}}\right) + \delta_1 \cdot 0 = 0$$

$$a + b + \gamma + 0\delta = 0$$

$$a + 2b - 3\gamma + 0\delta = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right) r_2 - r_1 \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} a &= -5s \\ b &= 4s \\ \gamma &= s \\ \delta &= t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b + \gamma &= 0 \\ b - 4\gamma &= 0 \end{aligned}$$

⊕

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = -5, b_1 = 4, x_1 = 1, s_1 = 0$$

$$\sqrt{25 + 16 + 1} = \sqrt{42}$$

$$\rightarrow \text{Apr } A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & -5/\sqrt{42} & x_2 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & 4/\sqrt{42} & b_2 \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & 1/\sqrt{42} & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & s_2 \end{pmatrix}$$

$$a(-5/\sqrt{42}) + b(4/\sqrt{42}) + x(1/\sqrt{42}) + s \cdot 0 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2 - r_1 \\ r_3 + 5r_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} a + b + x + s &= 0 \\ b - 4x &= 0 \\ x &= 0 \\ s &= t \end{aligned}$$

$$\text{Apr } A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & -5/\sqrt{42} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & 4/\sqrt{42} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & 1/\sqrt{42} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$